Квантовая механика. Физический факультет, 3 курс, 6 семестр.

Занятие №4. ***Математический аппарат квантовой механики: Вычисление средних значений операторов. Элементы теории представлений. Дискретное представление. Непрерывное представление.***

1. Проверка д/з.

<u>Задача 1.</u> Найти оператор, эрмитово сопряженный к оператору $e^{i\varphi\hat{\sigma}_j}$.

<u>Задачи 2-3.</u> Найти СФ и СЗ матриц $\hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

2. Вычисление средних значений операторов.

$$Def.: \quad \overline{A} = \left(\psi, \hat{A}\psi\right), \quad \overline{A^2} = \left(\psi, \hat{A}^2\psi\right),$$

$$\overline{\Delta A^2} = \overline{\left(\hat{A} - \overline{A}\right)^2} = \overline{A^2} - \left(\overline{A}\right)^2, \quad \delta A = \sqrt{\overline{\Delta A^2}}.$$

<u>Задача 4.</u> В состоянии, описываемом волновой функцией

$$\psi(x) = C\exp\left[\frac{ip_0x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right],$$

где p_0, x_0, a – вещественные параметры, найти функцию распределения по координатам частицы. Определить $\overline{x}, \overline{x^2}, \overline{p}, \overline{p^2}, \overline{\Delta x^2}, \overline{\Delta p^2}, \delta x, \delta p, \delta x \cdot \delta p.$ (ГКК № 1.19)

Для справки: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$

3. Элементы теории представлений.

3.1. Дискретное представление.

$$\hat{L}^\dagger = \hat{L}, \quad \hat{L}\psi_n = \lambda_n\psi_n; \quad \left(\psi_m, \psi_n\right) = \delta_{mn}.$$

$$\begin{cases} \psi(x) = \sum\limits_n C_n\psi_n; \\ C_n = \left(\psi_n, \psi\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(x)\psi(x)dx; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum\limits_n \psi_n^*(x')\psi_n(x) = \delta(x-x'); \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_m^*(x)\psi_n(x)dx = \delta_{mn}. \end{cases}$$

$\left\{C_n\right\}$ – функция $\psi(x)$ в дискретном L-представлении,

$A_{mn} = \left(\psi_m, \hat{A}\psi_n\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_m^*(x)\hat{A}\psi_n(x)dx$ - матрица оператора $\hat{A}$ в дискретном L-представлении.

$L_{mn} = \lambda_n \delta_{mn}$ - матрица оператора $\hat{L}$ в собственном дискретном представлении.

$$\hat{A}\psi(x) = \tilde{\psi}(x) \quad \rightarrow \quad \sum_n A_{mn} C_n = \tilde{C}_m, \quad C_n = \left(\psi_n, \psi\right), \tilde{C}_m = \left(\psi_n, \tilde{\psi}\right)$$

<u>Задача 5.</u> Записать матрицы Паули $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ в представлении СФ матрицы $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$.

3.2. Непрерывное представление.

$$\hat{L}^{\dagger} = \hat{L}, \quad \hat{L}\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda; \quad \left(\psi_\lambda, \psi_{\lambda'}\right) = \delta(\lambda - \lambda').$$

$$\begin{cases} \psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)\psi_\lambda(x)d\lambda \\ C(\lambda) = \left(\psi_\pi, \psi\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_\lambda^*(x)\psi(x)dx; \end{cases} \qquad \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_\lambda^*(x')\psi_\lambda(x)d\lambda = \delta(x - x'); \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\lambda'}^*(x)\psi_\lambda(x)dx = \delta(\lambda - \lambda'); \end{cases}$$

$C(\lambda)$ – функция $\psi(x)$ в непрерывном L-представлении,

$A(\lambda, \lambda') = \left(\psi_\lambda, \hat{A}\psi_{\lambda'}\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_\lambda^*(x)\hat{A}\psi_{\lambda'}(x)dx$ – ядро оператора $\hat{A}$ в дискретном L-представлении.

$L(\lambda, \lambda') = \lambda\delta(\lambda - \lambda')$ – ядро оператора $\hat{L}$ в собственном представлении.

$$\hat{A}\psi(x) = \tilde{\psi}(x) \quad \rightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda, \lambda')C(\lambda')d\lambda' = \tilde{C}(\lambda), \quad C(\lambda) = \left(\psi_\lambda, \psi\right), \tilde{C}(\lambda') = \left(\psi_{\lambda'}, \tilde{\psi}\right).$$

$\hat{L}C(\lambda) = \lambda C(\lambda)$ оператор $\hat{L}$ в своем собственном непрерывном представлении – это оператор умножения.

4. Дельта-функция Дирака – ядро единичного оператора. Свойства функции Дирака.

$$Def: \quad \psi(a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\delta(x - a)dx;$$

$$\delta(-x) = \delta(x); \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1; \quad \delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x);$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dx = \delta(k); \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dk = \delta(x).$$

Задачи 6-7. Найти вид операторов координаты и импульса в импульсном представлении. Для справки: СФ оператора импульса $\hat{p} = -i\hbar \dfrac{d}{dx}$, нормированные на δ–функцию, имеют вид

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}}.$$

5. **Самостоятельная работа** (~ 20 минут). Работа состоит из двух заданий: 1-е задание «стоит» 10 баллов, 2-е задание - 10 баллов, в сумме можно набрать максимум **20 баллов**.

Домашнее задание: ГКК №№ 1.19 (закончить), 1.22-1.25, 1.30, 1.42, 1.44, 1.45, 1.46*, 1.47*, 1.48*,1.54-1.59, 1.67*, Гр. № 32.

ГКК - Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981; Гр. - Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике, 1984

ЕК - Елютин П.В., Кривченков В.Д. Квантовая механика, 1976

*) – задачи обязательные только для студентов группы Ф037